HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

LÝ THUYẾT TRƯỜNG ĐIỆN TỪ VÀ SIÊU CAO TẦN

(Dùng cho sinh viên hệ đào tạo đại học từ xa)

Lưu hành nội bộ

HÀ NỘI - 2007

LÝ THUYẾT TRƯỜNG ĐIỆN TỪ VÀ SIÊU CAO TẦN

Biên soạn : **THS. TÔN THẤT BẢO ĐẠT**

THS. DƯƠNG HIỂN THUẬN

CHƯƠNG 1: CÁC ĐỊNH LUẬT VÀ NGUYÊN LÝ CƠ BẢN CỦA TRƯỜNG ĐIỆN TỪ

Ở môn học trường điện từ, chúng ta sẽ tìm hiểu phân bố của các đại lượng điện và từ, nguyên nhân tạo ra chúng và xác định các đại lượng khi đã biết một số đại lượng khác.Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về các vấn đề cơ bản nhất của trường điện từ bao gồm các đại lương của điện và từ, các định luật cơ bản nhất nêu lên mối liên hệ giữa các đại lượng đó với nhau. Trong chương này sẽ có nhiều khái niệm mới mà chúng ta cần nắm vững trước khi chuyển sang các chương kế tiếp. Các học viên cần chú ý đến cách dẫn ra các phương trình toán học từ các phát biểu. Để có thể đọc hiểu được, các học viên cần trang bị kiến thức toán: hàm nhiều biến, giải tích vectơ với các toán tử gradient, divergence, rotate đã học trong chương trình toán cao cấp. Nếu không nắm vững các phần toán học trên sẽ rất khó hiểu được và theo kịp các phần chứng minh trong chương này. Cuối chương sẽ là phần tóm tắt các hệ thức trong chương và các bài tập.

1.1. Các đại lượng đặc trưng cơ bản cho trường điện từ

1.1.1. Vec tơ cường độ điện trường

Một điện tích thử q đặt trong trường điện, chịu tác dụng của lực điện $\vec{F}_e$. Tại mỗi điểm của trường điện, tỉ số $\vec{F}_e$/q là một đại lượng không đổi, đại lượng ấy được gọi là *cường độ trường điện* tại điểm đó. Ký hiệu $\vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} \quad \text{(V/m)} \qquad (1.1.1)$$

Với q đủ nhỏ để không ảnh hưởng đến trường điện ban đầu.

1.1.2. Vec tơ điện cảm

Khi đặt điện môi vào trường điện, điện môi bị phân cực. Mức độ phân cực điện môi được đặc trưng bởi *vec tơ phân cực điện* $\vec{P}$. Vec tơ phân cực điện $\vec{P}$ xác định trạng thái phân cực điện môi tại mỗi điểm. *Vec tơ cảm ứng điện* $\vec{D}$ được định nghĩa bởi hệ thức:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad \text{(C/m}^2\text{)} \qquad (1.1.2)$$

Với $\varepsilon_0 = 1/4\pi.9.10^9$ (F/m) được gọi là hằng số điện.

Đối với môi trường tuyến tính, đẳng hướng:

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi_0.\vec{E} \qquad (1.1.3)$$

Thay (1.1.3) vào (1.1.2):

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad (1.1.4)$$

Với $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ được gọi là độ thẩm tỉ đối của môi trường với chân không.

$$\varepsilon = \varepsilon_0.\ \varepsilon_r \quad \text{(F/m)}$$

Được gọi là độ thẩm điện của môi trường

1.1.3. Vectơ cảm ứng từ

Một điện tích thử q chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ trong trường từ, chịu tác dụng lực $\vec{F}_m$

$$\vec{F}_m = q\vec{v}x\vec{B} \qquad (1.1.5)$$

Vec tơ $\vec{B}$ được gọi là *vec tơ cảm ứng từ*.

1.1.4. Vec tơ cường độ từ trường

Khi đặt từ môi vào trường từ, từ môi bị phân cực. Mức độ phân cực từ môi được đặc trưng bởi *vec tơ phân cực từ* $\vec{M}$. Vec tơ phân cực từ môi xác định trạng thái phân cực từ tại mỗi điểm của từ môi. *Vec tơ cường độ trường từ* $\vec{H}$ được định nghĩa bởi hệ thức:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{(A/m)} \qquad (1.1.6)$$

Với $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m, được gọi là hằng số từ.

Đối với môi trường tuyến tính, đẳng hướng:

$$\vec{M} = \chi_m.\vec{H} \qquad (1.1.7)$$

Thay (1.7) vào (1.6):

$$\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \qquad (1.1.8)$$

Với $\mu_r = 1 + \chi_m$, được gọi là độ thẩm từ tỉ đối của môi trường với chân không.

$$\mu = \mu_0\mu_r \quad \text{(H/m)}$$

là độ thẩm từ của môi trường.

1.2. Định luận Ohm và định luật bảo toàn điện tích

1.2.1. Định luật Ohm

Dòng điện là dòng chuyển dời có hướng của các hạt mang điện dưới tác dụng của điện trường. Cường độ dòng điện I chảy qua một diện tích S đặt vuông góc với dòng chảy bằng lượng điện tích Q dịch chuyển qua mặt S trong một đơn vị thời gian.

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad (1.2.1)$$

Để mô tả đầy đủ hơn sự chuyển động c1o hướng của các hạt mang điện, người ta đưa ra khái niệm mật độ dòng điện $\vec{J}$:

$$\vec{J} = Ne\vec{V} = \rho\vec{V} = \gamma\vec{E} \quad (\text{A/m}^2) \qquad (1.2.2)$$

Với: N là số lượng hạt mang điện, mỗi hạt có điện tích e. ρ là mật độ điện tích khối (đơn vị C/m^3) và γ là độ dẫn điện của môi trường (đơn vị S/m). Biểu thức (1.2.2) được gọi là dạng vi phân của định luật Ohm.

Xét một vùng dẫn có dạng khối lập phương, cạnh L, 2 mặt đối diện được nối với điện áp không đổi U. Cường độ dòng điện đi qua khối lập phương đó:

$$I = \int_S \vec{J}d\vec{S} = \int_S \gamma\vec{E}d\vec{S}$$

$$I = \int_S \gamma E dS = \gamma LU = \frac{U}{R} \qquad (1.2.3)$$

Với S = LxL là diện tích mặt bên.

R = L/γS : điện trở của khối vật dẫn.

1.2.2. Định luật bảo toàn điện tích

Định luật bảo toàn điện tích được Faraday tìm ra bằng thực nghiệm, nó được xem là một tiên đề của lý thuyết trường điện từ:

Tổng điện tích trong một hệ cô lập về điện không thay đổi.

Như vậy, lượng điện tích ở trong một thể tích V bị giảm đi trong một đơn vị thời gian bằng lượng điện tích đi ra khỏi thể tích V trong một đơn vị thời gian và bằng cường độ dòng điện I đi xuyên qua mặt kín S bao quanh thể tích V đó.

Gọi Q là điện tích của thể tích V. ρ là mật độ điện tích khối của V. Vậy:

$$I = -\frac{dQ}{dt} \qquad (1.2.4)$$

Với

$$Q = \int_V \rho dV \qquad (1.2.5)$$

Thay (1.2.5) vào (1.2.4):

$$I = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV$$

Áp dụng:

$$I = \int_S \vec{J} d\vec{S}$$

Ta được:

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Áp dụng biểu thức định lý divergence cho vế trái, ta được:

$$\int_V div\vec{J} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Biểu thức trên đúng với mọi thể tích V, vì vậy:

$$div\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$div\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (1.2.6)$$

Biểu thức (1.2.6) được gọi là dạng vi phân của định luật bảo toàn điện tích hay còn gọi là phương trình liên tục.

1.3. Các đặc trưng cơ bản của môi trường

Đặc tính của môi trường vật chất được thể hiện qua các tham số điện và từ của nó:

Độ thẩm điện ε (F/m)

Độ thẩm điện tỉ đối ε_r (không thứ nguyên)

Độ thẩm từ μ (H/m)

Độ thẩm từ tỉ đối μ_r (không thứ nguyên)

Độ dẫn điện γ (S/m)

Các biểu thức (1.1.4), (1.1.8), và (1.2.2) được gọi là các phương trình liên hệ hay còn gọi là các phương trình chất.

Dựa trên các tham số điện và từ, người ta chia vật chất (môi trường điện từ) ra thành các loại sau:

- *Môi trường tuyến tính:* các tham số ε, μ, và σ không phụ thuộc cường độ trường. Khi đó, các phương trình liên hệ là tuyến tính.

- *Môi trường đồng nhất và đẳng hướng:* các tham số điện và từ là hằng số. Trong môi trường này, các vectơ của cùng một phương trình liên hệ song song với nhau.
- Nếu các tham số điện từ theo các hương khác nhau có các giá trị không đổi khác nhau thì được gọi là *không đẳng hướng.*
- Môi trường có các đại lượng điện từ là các hàm của tọa độ được gọi là môi trường không đồng nhất.

Trong tự nhiên, hầu hết các chất có độ thẩm điện tỉ đối lớn hơn 1 và là môi trường tuyến tính.

- Môi trường có độ thẩm từ tỉ đối lớn hớn gọi là *chất thuận từ*, nhỏ hơn 1 gọi là *chất nghịch từ.*
- *Chất dẫn điện* là chất có $\gamma > 10^4$ (S/m).
- *Chất bán dẫn* là chất có $10^4 > \gamma > 10^{-10}$ (S/m)
- *Chất cách điện* là chất có $\gamma < 10^{-10}$ (S/m)
- Môi trường là *dẫn điện lý tưởng* nếu $\gamma = \infty$, là *cách điện lý tưởng* nếu $\gamma = 0$.

1.4. Các phương trình Maxwell

1.4.1. Khái niệm về dòng điện dịch

Đối với dòng điện không đổi, ta có $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Từ phương trình liên tục, ta suy ra:

$$div\vec{J} = 0 \qquad (1.4.1)$$

Dựa theo định nghĩa của toán tử divergence, hệ thức (1.4.1) chứng tỏ các đường dòng dẫn không đổi khép kín hoặc đi ra xa vô cùng, không có điểm bắt đầu và điểm kết thúc.

Đối với dòng điện biến đổi:

$$div\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0 \qquad (1.4.2)$$

Hệ thức (1.4.2) chứng tỏ các đường của dòng dẫn biến đổi không khép kín, chúng bắt đầu và kết thúc tại những điểm ở đó có mật độ điện tích biến đổi theo thời gian, chẳng hạn tại các cốt tụ của tụ điện. Dòng điện biến đổi đi qua được mạch có tụ, dù không tồn tại dòng chuyển dịch có hướng của các hạt mang điện đi qua lớp điện môi của tụ.

Maxwell đã đưa ra giả thiết có một quá trình xảy ra tương đương với sự có mặt của dòng điện giữa hai cốt tụ và đưa ra khái niệm *dòng điện dịch.*

Dòng điện dịch khép kín dòng điện dẫn trong mạch. trường điện biến đổi tạo nên dòng điện dịch này. Dòng chuyển dời có hướng của các hạt mang điện được Maxwell gọi là *dòng điện dẫn*. Dòng điện bao gồm dòng điện dẫn và dòng điện dịch được gọi là *dòng điện toàn phần.*

1.4.2. Phương trình Maxwell thứ ba và thứ tư

Phương trình Maxwell thứ tư được dẫn ra dựa theo định luật Gauss đối với trường điện.

Định luật Gauss được phát biểu như sau:

Thông lượng của vec tơ cảm ứng điện gởi qua một mặt kín S bất kỳ bằng tổng các điệnt ích tự do phân bố trong thể tích V được bao bởi mặt kín S ấy.

Gọi: q là tổng điện tích của thể tích V

$\vec{D}$ là vec tơ cảm ứng điện trên mặt kín S.

ρ là mật độ điện tích khối bên trong thể tích V.

Theo định luật Gauss:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

Áp dụng định lý Divergence đối với vế trái:

$$\int_V div\vec{D}dV = \int_V \rho dV$$

Hệ thức này luôn đúng với mọi thể tích V. Vì vậy:

$$div\vec{D} = \rho \qquad (1.4.3)$$

Nếu trong V không có điện tích thì $div\vec{D} = 0$, đường sức của vec tơ cảm ứng điện không có điểm bắt đầu và kết thúc trong thể tích V, hay nói cách khác V không phải là nguồn của vectơ cảm ứng điện.

Nếu $\rho > 0$, thông lượng của vectơ cảm ứng điện qua S dương, chứng tỏ đường sức của vectơ cảm ứng điện đi ra khỏi V. Ngược lại, đường sức của vec tơ cảm ứng điện đi vào V.

Từ biểu thức (1.4.3), ta có thể rút ra kết luận: *nguồn của trường vec tơ cảm ứng điện là điện tích, đường sức của vec tơ cảm ứng điện bắt đầu ở điện tích dương và kết thúc ở điện tích âm.*

Biểu thức (1.4.3) chính là phương trình thứ tư của hệ phương trình Maxwell.

Phương trình Maxwell thứ ba được dẫn ra từ định luật Gauss đối với trường từ:

Thông lượng của vec tơ cảm ứng từ $\vec{B}$ qua mặt kín thì bằng không.

Tương tự như cách dẫn phương trình Maxwell thứ tư, ta được:

$$div\vec{B} = 0 \qquad (1.4.4)$$

Hệ thức (1.4.4) chính là phương trình thứ ba của hệ phương trình Maxwell.

1.4.3. Phương trình Maxwell thứ nhất

Phương trình Maxwell thứ nhất được dẫn ra từ định luật lưu số Ampere-Maxwell, hay còn gọi là định luật dòng điện toàn phần. Định luật này thiết lập liên hệ giữa cường độ trường từ và dòng điện toàn phần tạo nên trường từ:

Lưu số của vectơ cường độ trường từ $\vec{H}$ theo đường kín C tùy ý bằng tổ đại số cường độ các dòng điện chảy qua diện tích bao bởi đường kín C.

$$\oint_C \vec{H}d\vec{l} = \sum_i I_i \qquad (1.4.5)$$

$I_i > 0$ nếu chiều của dòng điện hợp với chiều của đường lậy tích phân theo quy tắc đinh ốc thuận.

Trong trường hợp dòng I chảy qua điện tích S phân bố liên tục với mật độ dòng $\vec{J}$, định luật lưu số Ampere – Maxwell có dạng:

$$\oint_C \vec{H}d\vec{l} = \int_S \vec{J}d\vec{S} \qquad (1.4.6)$$

Áp dụng định lý Stokes đối với vế trái, chuyển vế, ta được:

$$\int_S (rot\vec{H} - \vec{J})d\vec{S} = 0 \qquad (1.4.7)$$

Vì vế trái luôn bằng không với mọi S, biểu thức dưới dấu tích phân phải bằng không, rút ra:

$$rot\vec{H} = \vec{J} \qquad (1.4.8)$$

Tiếp theo, ta lấy divergence cả hai vế của (1.4.8):

$$divrot\vec{H} = div\vec{J}$$

Vế trái luôn bằng không với mọi vec tơ $\vec{H}$ (xem ở chương trình toán). Liên hệ với phương trình liên tục:

$$div\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$0 = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (1.4.9)$$

Hệ thức (1.4.9) chỉ đạt được khi dòng điện là dòng không đổi. Vậy hệ thức (1.4.5) và (1.4.8) chỉ đúng khi dòng điện là dòng không đổi.

Bây giờ ta xét trường hợp dòng điện biến thiên. Khi đó:

$$div\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$$

Thay (1.4.3) vào, ta được:

$$div\vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} div\vec{D}$$

$$div(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0 \qquad (1.4.10)$$

Hệ thức (1.4.10) chứng tỏ đường dòng của vec tơ $\vec{J}_{tp} = (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})$ khép kín. Vec tơ $\vec{J}_{tp}$ chính là vec tơ mật độ dòng điện toàn phần đã đề cập ở mục 1.4.1. Dòng điện toàn phần là tổng của dòng điện dẫn có vec tơ mật độ dòng điện dẫn:

$$\vec{J} = \gamma\vec{E} \qquad (1.4.11)$$

Và dòng điện dịch có vec tơ mật độ dòng điện dịch:

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (1.4.12)$$

Biểu thức toán học của định luật lưu số của Ampere (1.4.6) đã được Maxwell mở rộng như sau, khi có kể đến dòng điện dịch:

$$\oint_C \vec{H}d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t})d\vec{S} \qquad (1.4.13)$$

$$rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (1.4.14)$$

Hệ thức (1.4.14) chính là phương trình thứ nhất của hệ phương trình Maxwell. Hệ thức này chứng tỏ không chỉ dòng điện dẫn mà ngay cả điện trường biến thiên cũng có thể sinh ra trường từ.

1.4.4. Phương trình Maxwell thứ hai

Phương trình thứ hai của hệ phương trình Maxwell được dẫn ra từ định luật cảm ứng điện từ Faraday. Định luật này thiết lập mối quan hệ giữa trường từ biến đổi trong không gian với trường điện phân bố trong không gian do trường từ gây ra:

Sức điện động sinh ra trên một vòng dây có giá trị bằng và ngược dấu với tốc độ biến thiên của từ thông gởi qua diện tích giới hạn bởi vòng dây đó.

$$\oint_C \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S} \qquad (1.4.15)$$

Với S là mặt giới hạn bởi đường cong kín C. Yếu tố diện tích $d\vec{S}$ của mặt S có chiều hợp với chiều của lấy tích phân C theo quy tắc đinh ốc thuận.

Áp dụng định lý Stokes với vế trái:

$$\oint_C \vec{E}d\vec{l} = \int_S rot\vec{E}d\vec{S} \qquad (1.4.16)$$

Nếu mặt lấy tích phân S không phụ thuộc thời gian:

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S} \qquad (1.4.17)$$

Thay (1.4.16) và (1.4.17) vào (1.4.15)m ta được:

$$\int_S rot\vec{E}d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S} \qquad (1.4.18)$$

Hệ thức (1.4.18) luôn đúng với mọi S, vì vậy:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (1.4.19)$$

Hệ thức (1.4.19) biểu diễn toán học của định luật Faraday, chính là phương trình thứ hai trong hệ phương trình Maxwell. Hệ thức này chứng tỏ trường từ biến thiên theo thời gian làm sinh ra trường điện xóay phân bố trong không gian.

Đến đây, ta đã có đủ hệ phương trình Maxwell gồm 4 phương trình:

$$\begin{aligned} &rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ &rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &div\vec{B} = 0 \\ &div\vec{D} = \rho \end{aligned} \qquad (1.4.20)$$

Cần lưu ý rằng hệ phương trình Maxwell (1.4.20) cùng các phương trình liên hệ chỉ đúng với môi trường chất không chuyển động, các thông số của môi trường không phải là các hàm của thời gian, trong môi trường không có chất sắt từ, không có nam châm vĩnh cửu.

1.4.5. Hệ phương trình Maxwell với nguồn ngoài:

Trong trường hợp xét trường được tạo ra bởi nguồn kích thích là nguồn độc lập với môi trường và không chịu ảnh hưởng của trường do nó tạo ra, hệ phương trình Maxwell phải có xét đến yếu tố *mật độ dòng điện ngoài* $\vec{J}_e$. Hệ phương trình Maxwell trở thành:

$$\begin{aligned} &rot\vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_e + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ &rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &div\vec{B} = \rho \\ &div\vec{D} = 0 \end{aligned} \qquad (1.4.21)$$

1.4.6. Nguyên lý đổi lẫn của hệ phương trình Maxwell

Xét trường hợp với môi trường đồng nhất và đẳng hướng, bên trong không tồn tại dòng dẫn, mật độ điện tích tự do bằng không, không có nguồn ngoài. Hệ phương trình Maxwell trong trường hợp này có dạng gọn là:

$$\begin{aligned} &rot\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &rot\vec{E} = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ &div\vec{H} = 0 \\ &div\vec{E} = 0 \end{aligned} \qquad (1.4.22)$$

Xét thấy hệ phương trình (1.4.22) có dạng đối xứng. Các phương trình Maxwell vẫn giữ nguyên nếu ta thực hiện phép đổi lẫn:

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}, \varepsilon \leftrightarrow -\mu\,. \qquad (1.4.23)$$

Tính chất này được gọi là nguyên lý đổi lẫn.

Tương tự, trong trường hợp có nguồn ngoài, nguyên lý áp dụng sẽ là:

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{H}, \varepsilon \leftrightarrow -\mu, \vec{J}_e \leftrightarrow \vec{J}_m, \rho \leftrightarrow \rho_m \qquad (1.4.24)$$

Với $\vec{J}_m, \rho_m$ là mật độ dòng từ và từ tích, hai đại lượng đưa vào mang tính hình thức, thực tế, chúng luông bằng không.

Nguyên lý đổi lẫn của hệ phương trình Maxwell có ý nghĩa quan trọng trong việc nghiên cứu lý thuyết và trong khi giải các bài toán điện từ thực tiễn, nếu kết quả của nguồn điện (hay nguồn từ) là đã biết thì chúng ta có thể nhận ngay kết quả do nguồn từ (hoặc nguuồn điện) mà không phải tiến hành quá trình giải bài toán đó.

1.4.7. Hệ phương trình Maxwell đối với trường điều hòa

Một trạng thái rất quan trọng của trường điện từ là trạng thái khi các đại lượng cơ bản của trường và nguồn biến thiên điều hòa theo thời gian với tần số góc ω. Bây giờ ta đi biểu diễn các đại lượng cơ bản của trường dưới dạng số phức và viết các phương trình Maxwell cho các biên độ phức của nó. Các đại lượng thực của trường ở một thời điểm bất kỳ được coi như là phần thực của các đại lượng phức tương ứng với chúng.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= re\left\{\vec{i}_x E_{xm} e^{i(\omega t+\psi_X)} + \vec{i}_y E_{ym} e^{i(\omega t+\psi_y)} + \vec{i}_z E_{zm} e^{i(\omega t+\psi_Z)}\right\} \\ \vec{E} &= re\left\{\dot{\vec{E}} e^{i\omega t}\right\} \end{aligned} \qquad (1.4.22)$$

Với $\vec{H}, \vec{J}, \rho$, cách biểu diễn tương tự.

Từ cách biểu diễn phức các đại lượng của trường theo (1.4.22), chúng ta xây dựng được hệ phương trình Maxwell dạng vi phân cho các biên độ phức của trường như sau:

$$\begin{aligned} rot\dot{\vec{H}} &= \dot{\vec{J}} + i\omega\dot{\vec{D}} \\ rot\dot{\vec{E}} &= -i\omega\dot{\vec{B}} \\ div\dot{\vec{B}} &= 0 \\ div\dot{\vec{D}} &= +\dot{\rho} \end{aligned} \qquad (1.4.23)$$

Các phương trình liên hệ dạng phức:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{D}} &= \varepsilon\dot{\vec{E}} \\ \dot{\vec{B}} &= \mu\dot{\vec{H}} \\ \dot{\vec{J}} &= \gamma(\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{E}}_e) = \gamma\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{J}}_e \end{aligned} \qquad (1.4.24)$$

Với $\dot{\vec{E}}_e$ là cường độ của nguồn ngoài tạo nên trường.

Trong trường hợp không có nguồn ngoài:

$$\begin{aligned} rot\dot{\vec{H}} &= i\omega\dot{\varepsilon}\dot{\vec{E}} \\ rot\dot{\vec{E}} &= -i\omega\mu\dot{\vec{H}} \\ div(\mu\dot{\vec{H}}) &= 0 \\ div(\dot{\varepsilon}\dot{\vec{E}}) &= 0 \end{aligned} \qquad (1.4.25)$$

Với $\dot{\varepsilon} = \varepsilon - i\dfrac{\gamma}{\omega}$ được gọi là độ thẩm điện phức của môi trường.

1.5. Điều kiện bờ đối với các vec tơ của trường điện từ